

Il problema della gita

Uso dei dati impliciti nei problemi di matematica

Chiara Castro¹ - Silvano Locatello² - Gianna Meloni³
N.R.D. Bologna⁴

Summary. This paper aims to explain the difficulties met by 11 year-old children who are asked to solve a problem concerning a school trip. The return home from the trip destination is not mentioned in the problem (implicit datum).

The results of the research show the importance of the *didactic contract* as a regulatory mechanism which is able to raise as well as to lower the level of difficulties.

On the *didactic contract* can depend the success or failure of the child's performance in solving such problems in these situations.

Premessa

Questo lavoro nasce come frutto inaspettato di un'altra ricerca condotta da Bruno D'Amore (D'Amore, 1993, pp. 51-52) che sondava la problematica del frazionamento di un problema complesso in una successione di esercizi componenti elementari. Il testo del problema della ricerca di D'Amore era il seguente:

A I 18 allievi di seconda vogliono fare una gita scolastica di un giorno da Bologna a Verona. Devono tener conto dei seguenti dati:

1. due di essi non possono pagare;
2. da Bologna a Verona ci sono 120 km;
3. un pullmino da 20 posti costa 200.000 lire al giorno più 500 lire al chilometro (compresi i pedaggi autostradali).

Quanto verrà a spendere ciascuno?

Si nota subito che il nodo del problema sta nel non aver detto in modo esplicito che è necessario considerare nei calcoli non solo il percorso chilometrico dell'andata, ma anche quello del ritorno.

¹ Scuola Elementare "Pio X" di Robegano, Salzano (VE).

² Scuola Elementare "Pio X" di Robegano, Salzano (VE).

³ Scuola Elementare "Parolari" di Zelarino (VE).

⁴ Dipartimento di Matematica, Università di Bologna.

Il problema era allora stato suddiviso in tre componenti per verificare se la gradualità nel processo risolutivo potesse in qualche modo aiutare i bambini ad immaginarsi la situazione, porsi in una situazione di programmazione e considerare nei calcoli i chilometri percorsi in andata e necessariamente anche in ritorno. I testi erano i seguenti:

A1 118 allievi di seconda vogliono fare una gita scolastica di un giorno da Bologna a Verona. Poiché due di essi non possono pagare e l'insegnante accompagnatore è ospite, in quanti dovranno ripartirsi la spesa?

A2 118 allievi di seconda vogliono fare una gita scolastica di un giorno da Bologna a Verona. Il pullmino da 20 posti costa 200.000 lire al giorno più 500 lire al chilometro (compresi i pedaggi autostradali). Da Bologna a Verona ci sono 120 km. Quanto spenderà la classe?

A3 Come A.

Tuttavia si era notato che la somministrazione del problema complesso A, o della successione A1, A2, A3 non produceva alcuna variazione significativa dei risultati, in quanto la maggior parte dei bambini non considerava i chilometri percorsi in ritorno. Al contrario l'ulteriore suddivisione del testo A2 in due componenti, una delle quali chiedeva in modo esplicito quanti sarebbero stati i chilometri percorsi in quella giornata, faceva risultare un netto incremento delle risposte corrette.

La conclusione che se ne traeva era che «...il frazionamento di un problema complesso in componenti dà un miglioramento significativo se il nodo concettuale del problema è evidenziato in modo esplicito: di per sé, come d'altra parte sembra ovvio, non produce affatto miglioramenti di sorta» (D'Amore, 1993, p. 52).

Ma da questa ricerca emergeva curiosamente un altro interrogativo:

- perché la maggior parte dei bambini non considerava il dato chilometrico del ritorno?

Che cosa li induceva a non pensare che, se il pullmino costava oltre alle 200.000 lire al giorno anche 500 lire al chilometro, era necessario considerare non solo i chilometri percorsi in andata ma anche quelli in ritorno?

La nostra ricerca è stata condotta con lo scopo di dare una risposta significativa a quest'ultimo quesito.

Ipotesi

Prima di tutto abbiamo cercato di provare in via sperimentale se effettivamente la maggior parte di gruppi classe di bambini di 10-11 anni di età (IV, V elementare), con maturate esperienze di gite scolastiche, avesse difficoltà a considerare il dato implicito del ritorno. Con una certa sorpresa abbiamo constatato che il problema aveva un micidiale tranello, nel quale cadevano inesorabilmente non solo alunni della scuola elementare, ma anche della media inferiore e del biennio superiore.

Queste prime prove sul campo ci facevano capire che c'era qualcosa d'altro rispetto alla difficoltà di considerare un dato implicito, e che ciò meritava di essere approfondito in una specifica ricerca. Inoltre avevamo raccolto elementi sufficienti per delineare una serie di ipotesi da verificare in seguito.

Le difficoltà che incontrano i bambini, che non considerano nel calcolo della spesa il dato chilometrico del ritorno, potrebbero essere di carattere rappresentativo, ovvero essi hanno difficoltà ad immaginarsi una situazione reale partendo dal testo del problema e soprattutto non fanno tesoro delle esperienze maturate nelle varie gite scolastiche fatte.

Oppure nella elaborazione dei dati del problema ci potrebbero essere difficoltà a controllare che i numeri considerati siano coerenti con la situazione problematica proposta, in sostanza difficoltà a contestualizzare i dati numerici del problema, per cui i numeri vengono considerati come numeri puri, astratti e senza referenti reali.

Un'altra ipotesi è che ci possano essere delle componenti emotivo-affettive che portano i bambini, nelle loro esperienze maturate, a non considerare il momento del ritorno come importante, e quindi degno di essere ricordato. È come se la mente fosse abituata a non ricordare il tempo trascorso durante il viaggio di ritorno dalle gite, perché spesso vissuto con stress, stanchezza, sonno, desiderio di arrivare presto a casa, oppure perché trascorso psicologicamente troppo in fretta divertendosi, giocando, parlando, cantando, facendo confusione, oppure infine perché non recuperato dagli insegnanti.

L'ultima ipotesi è che ci sia a monte di tutte queste possibili difficoltà una sorta di meccanismo di modulazione in grado di far aumentare o diminuire l'intensità stessa delle difficoltà e quindi di favorire od ostacolare il processo di risoluzione che ogni bambino mette in atto, anche quando ci sono problemi con tranelli simili. Si tratta del *contratto didattico* (Brousseau, 1986), ovvero dell'insieme di regole e procedure con le quali il bambino lavora, agisce e si esprime, in modo più o meno consapevole, in funzione di ciò che l'insegnante si aspetta da lui e dal gruppo-classe o viceversa di ciò che il bambino si aspetta dall'insegnante. In questo senso l'insegnante potrebbe attirare l'attenzione del bambino, anche nella sua componente emotiva, recuperando il ritorno durante le attività scolastiche programmate sulla gita.

Inoltre i bambini possono essere abituati a risolvere i problemi senza porsi troppe domande, e stando assolutamente fedeli a ciò che il testo del problema riporta: i fatidici "dati". A questi bambini potrebbe non passare minimamente per la testa di considerare (o peggio potrebbero crederlo illecito) un dato numerico che non figuri nel testo del problema, e per il quale l'insegnante non abbia dato alcuna indicazione verbale o scritta di attenzione. A questo proposito ci sembrava interessante verificare se quegli stessi bambini, invitati a risolvere il problema per un'altra via, che non fosse esplicitamente matematica, ma linguistica (come per esempio stendere il programma della gita), pensassero naturalmente al ritorno come a un dato importante da utilizzare. In altre parole volevamo osservare se ci

fosse qualche differenza di risultati nella risoluzione del problema per via aritmetica o per via linguistica, adoperando numeri e operazioni oppure parole e frasi.

Se per ipotesi i bambini, utilizzando la modalità linguistica di risoluzione, non avessero difficoltà a considerare il dato implicito del ritorno, allora le conseguenti riflessioni sul contratto didattico diverrebbero di importanza cruciale: a seconda del campo di regole e procedure di lavoro, “fare matematica” o “fare lingua”, i bambini darebbero risposte diverse su uno stesso problema.

A questo punto sorgono spontanee le seguenti domande:

- perché proprio il “fare matematica” deve essere penalizzato?
- Il problema sta in un certo modo di “fare” o nella “matematica”?

Descrizione della ricerca

Per accertare la validità delle ipotesi, decidiamo di fare una verifica sperimentale preliminare con degli alunni di quarta elementare e successivamente di attuare l'indagine di ricerca con alunni di quinta elementare.

Operiamo in ogni classe adottando modalità e tempi di ricerca così strutturati:

- ciascuna classe o modulo viene suddivisa in due gruppi (è sempre prevista la presenza contemporanea di due o tre insegnanti del gruppo di ricerca);
- il lavoro viene così distribuito:
 - Gruppo 1: i due terzi della classe (o una classe) risolvono con procedure aritmetiche il problema (tempo complessivo 20 minuti);
 - Gruppo 2: i rimanenti alunni (o un'altra classe) sono invitati a programmare e a rappresentare graficamente il testo del problema (tempo complessivo 40 minuti);
- l'attività in ogni classe prevede due incontri (attuati sempre, per accordi presi con gli insegnanti di classe, in orario pomeridiano) così articolati:
- 1° incontro: dopo una prima presentazione spieghiamo agli alunni lo scopo del lavoro dicendo chiaramente che il nostro intento è di comprendere il modo di procedere e le eventuali difficoltà incontrate da ogni bambino nel passare dalla lettura del testo fino alla proposta di una soluzione. Invitiamo gli alunni ad esprimersi nel modo più libero possibile, chiediamo la disponibilità a collaborare precisando che le prove non influenzeranno la valutazione scolastica in quanto i risultati individuali non verranno forniti agli insegnanti di classe. Mentre ogni gruppo risolve il problema, non forniamo alcuna indicazione sulla possibile soluzione e controlliamo che ogni alunno lavori individualmente.
- 2° incontro: prevediamo interviste registrate condotte individualmente o collettivamente con modalità di discussione.

Prima fase

La prova preliminare al lavoro di ricerca viene condotta in una classe IV di Zelarino.

Si propone agli alunni il seguente testo:

Gruppo 1:

La classe 4B di Zelarino vuole fare una gita a Verona.

Zelarino dista da Verona 120 km.

Il pullman costa 500 lire al chilometro.

Quanto spende la classe per il pullman?

Gruppo 2:

La classe 4B di Zelarino vuole fare una gita a Verona.

Zelarino dista da Verona 120 km.

Il pullman costa 500 lire al chilometro.

Quanto spende la classe per il pullman? Aiutali a programmare la gita.

I testi consegnati sono stampati su un foglio formato A4 sul quale è stata predisposta una griglia a quadretti per agevolare gli alunni nella fase di impostazione e conduzione del lavoro.

Dopo una prima lettura individuale, alcuni alunni chiedono esplicitamente il nostro intervento per la comprensione del significato della parola “dista” che risulta inizialmente come l’unica parola di difficile comprensione.

All’interno di questa prima fase siamo dovuti intervenire per indurre gli alunni del gruppo 2 a concentrarsi sulla stesura del programma della gita in quanto si sono sentiti subito spinti a trascrivere i dati, a cercare un’operazione e a trovare una soluzione. Constatiamo che il contratto didattico, all’interno di un problema aritmetico, scatta da solo indipendentemente dalla presenza di altri insegnanti.

Risultati generali

Gli elaborati finali hanno i seguenti esiti:

- i bambini del gruppo 1 (15) non hanno messo il dato del ritorno;
- i bambini del gruppo 2 (7 su 8) hanno previsto il ritorno, ma non l’hanno usato per il calcolo della spesa.

I protocolli e le interviste hanno permesso l’individuazione sia di difficoltà di ordine tecnico-operativo che di interferenze collocate nel testo, che possono aver ostacolato la ricerca della soluzione esatta (considerare il ritorno nella spesa per il pullman), o aver distolto gli alunni dal contesto del problema.

Le interviste

Le interviste registrate condotte individualmente hanno fatto emergere «due

categorie di convinzioni - che appaiono determinanti nel contesto del problem solving -: quelle che riguardano la natura della matematica in generale e quelle che riguardano le proprie capacità in matematica » (Tonelli, Zan, 1995).

Come si può dedurre dalle interviste, è emersa la presenza di un radicato contratto didattico per il quale il bambino è spinto verso un'abituale rappresentazione di risoluzione di problemi e ad un tacito accordo che, se c'è un dato implicito, l'insegnante deve mettere in guardia (*effetto topazio* in Brousseau, 1986).

Ins.: "...mi descrivi il tuo lavoro?"

Igor: *"io leggo il testo, dopo faccio, risolvo subito il problema, scrivo i dati che ci sono e la richiesta e dopo vedo se serve la più, la meno, la per, la divisione..."*

Monica: *"perché bisogna calcolare, bisogna calcolare e dopo... il risultato, e con il risultato puoi fare qualcosa..."*

Ins.: "...perché il testo non fa pensare al ritorno?"

Sabrina: *"nel testo non c'è scritto, non si sa e neanche è detto che c'era il ritorno e poi se era un dato nascosto il mio maestro scrive, prima del testo, che è un problema con il dato nascosto."*

Ins.: "...cosa ci consigli di fare?"

Manuel: *"bisogna prima dettare il problema e poi dire di stare attenti."*

Seconda fase

Dopo un'attenta riflessione sul lavoro svolto, lo studio di altre esperienze su problemi con percorsi di andata e ritorno e la revisione delle interviste condotte nella classe quarta, decidiamo di proporre ad altre classi (una V di Chirignago e due V di Marghera) il testo del problema con una modifica nella quale invece di dare la distanza del viaggio di andata si dà la distanza del viaggio di ritorno.

Facciamo questa variazione perché, come avevamo considerato in un'ipotesi della premessa, pensiamo che forse il bambino viva il ritorno dalla gita in modo meno significativo rispetto all'andata e al periodo vissuto nel luogo di destinazione. Così infatti emerge dall'intervista a Silvia *"...eh, perché la gita la fanno per andare, quando vanno fanno la gita, quando ritornano non la fanno..."* o come precisa Rondini: «Come è stato riscontrato anche in altre esperienze di percorsi di A/R, vi è al ritorno una caduta d'interesse nell'osservazione di ciò che viene vissuto come già percepito...» (Rondini in Boeri, 1993).

Poiché in questa fase si vuole verificare se indurre il bambino a porre l'attenzione sul ritorno possa facilitarlo nella risoluzione corretta del problema, la modalità di lavoro prevede un solo incontro dove si propone a tutti i bambini di una stessa classe il testo rielaborato.

Il nuovo testo risulta così formulato:

La classe 4B di... ha fatto una gita a Verona.

Al ritorno un bambino chiede all'autista: "Quanto dista Verona da...?"

L'autista risponde: "120 chilometri."

Il pullman costa 500 lire al chilometro.

Quanto ha speso la classe per il pullman?

(Al posto dei puntini è stato scritto la prima volta Chirignago, la seconda Marghera).

Risultati generali

Gli elaborati hanno i seguenti esiti:

Classe V di Chirignago: alunni 11. 5 alunni su 11 danno la risposta corretta.

Classi V di Marghera: alunni 26. 1 alunno su 26 dà la risposta corretta.

Il controllo dei protocolli ci porta a cogliere, come prima considerazione, che gli alunni di quinta non hanno incontrato alcuna difficoltà tecnica nell'eseguire una moltiplicazione con fattori di tre cifre. L'eliminazione di una difficoltà di calcolo e quindi di un ostacolo che può generare un "blocco" davanti al testo o svilupparsi in calcoli senza alcun senso, mette in evidenza come tale prova sia adeguatamente formulata per il livello cognitivo di una classe quinta.

Visionando gli esiti finali complessivi, emerge che solo 6 alunni su 37 danno la soluzione corretta del problema. Questi dati ci fanno capire che far porre l'attenzione del bambino sul ritorno non lo facilita a cogliere e sciogliere il nodo concettuale del problema.

La ricerca sul nuovo testo riformulato non prosegue oltre, per cui nella terza fase ritorniamo al testo iniziale. Pur tuttavia crediamo che l'ipotesi rimanga da approfondire in quanto la prova è stata effettuata solo su 37 alunni e quindi su un ristretto campione.

Esempi di protocolli

GIOVANNI

Risolvero
DATI da Chivignago a Verona ci sono 120
Km di distanza
Ogni Km costa £ 500.

Devo moltiplicare i 120 Km per due e
così trovo i Km percorsi dal pullman
Poi moltiplico il risultato per 500 e
trovo quanto spende la classe

Indico	Calcolo
£ $500 \times (120 \times 2) =$ £ 120'000 costo del pullman	$\begin{array}{r} 500 \times \\ 240 = \\ \hline 000 \\ 2000- \\ 1000- \\ \hline 120000 \end{array}$

Rispondo
Il pullman costa £ 120'000
alla classe

Roberta

PROBLEMA

LA CLASSE 4B DI MARGHERA HA FATTO UNA GITA A VERONA.
AL RITORNO UN BAMBINO CHIEDE ALL' AUTISTA QUANTO DISTA VERONA DA MARGHERA;
L' AUTISTA RISPONDE 120 CHILOMETRI.
IL PULLMAN COSTA 500 LIRE AL CHILOMETRO.
QUANTO HA SPESO LA CLASSE PER IL PULLMAN?

Dati:

120km = distanza in chilometri da Verona Marghera

500€ = costo del pullman al chilometro

Richiesta:

Spesa della classe per il pullman

Indice

Km $(120 + 120) = \text{Km } 240$

chilometri percorsi
in tutto dal pullman

Calcolo

120 +

120 =

240

€ $(500 \times 240) = \text{€ } 125.000$

costo speso dalla classe

500 x

240 =

125.000 +

10000 =

125.000

Risposta

La classe per il pullman ha speso € 125.000

Terza fase

Sulla base di quanto è emerso finora decidiamo di:

- A) seguire le modalità della ricerca fissate in fase di progettazione iniziale;
- B) scegliere per l'indagine della ricerca un campione costituito da 3 classi (1 classe V di Zelarino, 2 classi V di Salzano) per un totale di 62 alunni;
- C) togliere dal testo del problema le interferenze colte dagli elaborati prodotti dalla classe quarta, ossia si usano come numerali solamente il valore di 500 e la misura 120 con le rispettive marche scritte per esteso.

I testi ora risultano così formulati:

Gruppo 1:

La classe quarta di... vuole fare una gita a Verona.
...dista da Verona 120 chilometri.
Il pullman costa 500 lire al chilometro.
Quanto spende la classe per il pullman?

Gruppo 2:

La classe quarta di... vuole fare una gita a Verona.
...dista da Verona 120 chilometri.
Il pullman costa 500 lire al chilometro.
Quanto spende la classe per il pullman?
Aiutali a programmare la gita.

(Al posto dei puntini è stato messo una volta Zelarino e l'altra Salzano).

Dagli appunti che abbiamo preso durante le fasi della prova abbiamo osservato che:

- La quasi totalità degli alunni ha dedicato poco tempo alla lettura e alla comprensione del testo; è passata subito alla trascrizione dei dati o ad una veloce esplorazione con l'immediata esecuzione di diversi tentativi tattici; l'alunno impiega il tempo a disposizione per "fare" piuttosto che per "pensare".
- Pochi alunni chiedono esplicitamente l'intervento dell'insegnante per chiarimenti semantici o ulteriori informazioni inerenti la richiesta del problema.
- Alcuni alunni chiedono se possono scrivere, nel foglio della prova, dubbi, incertezze o aggiungere domande.
- L'invito a programmare la gita determina un atteggiamento meno ansioso, più partecipativo nei confronti della prova.
- La rappresentazione grafica del testo con il disegno viene eseguito da alcuni alunni in modo spontaneo e utilizzato come linguaggio ausiliario nella risoluzione del problema; da altri è eseguito come prestazione richiesta o atto conclusivo della prova ed usato esclusivamente come rappresentazione di figure allegoriche.

Risultati generali

Classe V di Zelarino (alunni 21).

Gruppo 1: su 14 alunni, 4 trovano la soluzione corretta.

Gruppo 2: su 7 alunni, nessuno trova la soluzione aritmetica corretta, 5 alunni considerano il ritorno nel programma, ma non lo usano nella risoluzione.

Classi V (modulo) di Salzano (41 alunni).

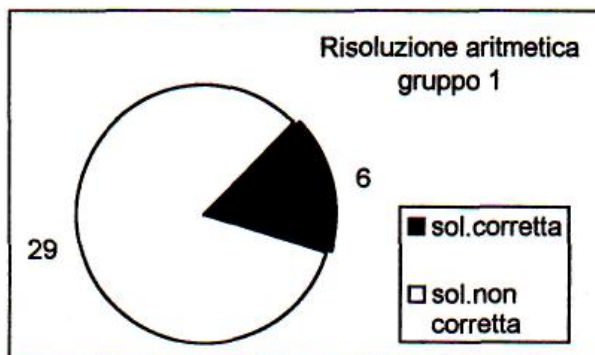
Gruppo 1: su 21 alunni, 2 alunni trovano la soluzione corretta.

Gruppo 2: su 20 alunni, 2 alunni trovano la soluzione corretta, 6 alunni considerano il ritorno nel programma, ma non lo usano nella risoluzione.

I risultati complessivi ottenuti dalle risoluzioni aritmetica e dal programma gita sono riportati nelle tabelle 1 e 2.

RISOLUZIONE ARITMETICA		GRUPPO 1		Tabella 1
CLASSE	N° ALUNNI	SOLUZIONE CORRETTA	SOLUZIONE NON CORRETTA	
V ELEMENTARE	14	4	10	
V ELEMENTARE	21	2	19	

RISOLUZIONE CON PROGRAMMA		GRUPPO 2			Tabella 2
CLASSE	N° ALUNNI	SOLUZIONE CORRETTA	CONSIDERA IL RITORNO NEL PROGRAMMA	NON CONSIDERA IL RITORNO NEL PROGRAMMA	
V ELEMENTARE	7	0	5	2	
V ELEMENTARE	20	2	6	12	



Osservando i risultati complessivi che riportiamo nelle tabelle e nei grafici emerge che, su 35 bambini che risolvono il problema solo aritmeticamente, il 17,14% dà soluzione corretta, l'82,85% errata. Su 27 bambini che risolvono il problema impostando anche il programma, il 7,48% dà soluzione corretta, il 40,74% considera il ritorno nell'orario di rientro o nella rappresentazione, il rimanente non lo considera affatto.

Viene da pensare che il "fare lingua", cioè utilizzare il codice linguistico orale o scritto, aiuti il bambino a rielaborare le proprie

esperienze sentendosi coinvolto, motivato, ma questo non è sufficiente per trasferirle in un contesto “prettamente matematico” quale può essere la risoluzione di un problema conciso e quindi non offre la sicurezza di poter andare oltre al testo, al dato, al numero.

Dallo studio dei protocolli e dalle affermazioni fatte durante la discussione si constata che anche gli alunni di classe quinta, si sentono spinti a tentare un'operazione risolutiva, cercano una risposta ottenuta combinando mediante qualche operazione i dati numerici a disposizione nel testo. Inoltre si osserva come alcuni alunni, che scoprono il dato implicito, sciogliendo così il nodo “concettuale” del problema, si sentono però “spinti” a giustificare o a dichiarare la loro proposta risolutiva (o la modalità di ragionamento) e lo manifestano:

- riformulando per iscritto una nuova domanda analoga al testo del protocollo;
- spiegando per iscritto che hanno un dubbio sul percorso;
- dichiarando verbalmente che hanno calcolato il ritorno perché “...hanno riletto”, “...hanno ripensato...”, o “...perché altrimenti la prova era troppo facile...”.

Esempi di protocolli

Protocollo: l'attenzione è focalizzata sui prodotti piuttosto che sui processi (Tonelli, Zan, 1995); i numeri servono per fare le operazioni combinando i dati a disposizione e la forma in cui viene presentata la soluzione del problema è più rilevante della sua correttezza.

SERENELLA 10/4/95 5^a A T.P.

PROBLEMA

LA CLASSE QUARTA DI ZELARINO VUOLE FARE UNA GITA A VERONA.

ZELARINO DISTA DA VERONA 120 CHILOMETRI.

IL PULLMAN COSTA 500 LIRE AL CHILOMETRO.

QUANTO SPENDE LA CLASSE PER IL PULLMAN?

DATI

120 Km → distanza da Zelarino a Verona.

500 € → costo di ogni chilometro percorso dal pullman



$$€ (500 \times 120) = 60000 \text{ €}$$

costo del viaggio

$$\begin{array}{r} 500 \times \\ 120 = \\ \hline 60000 \end{array}$$

RISPOSTA

La classe spende complessivamente 60000 €

Protocollo: il bambino manifesta l'esigenza di riportare dubbi o modifiche sul foglio della prova per "giustificare" la sua modalità di esecuzione.

*Ilva Gallo
classe V-A*

PROBLEMA	
<p>LA CLASSE QUARTA DI SALZANO VUOLE FARE UNA GITA A VERONA. SALZANO DISTA DA VERONA 120 KILOMETRI. IL PULLMAN COSTA 500 LIRE AL KILOMETRO. QUANTO SPENDE LA CLASSE PER IL PULLMAN, AIUTALI A PROGRAMMARE LA GITA.</p>	<p><i>Violetta che chi risolve il problema calcoli anche insieme il costo del ritorno della gita.</i></p>
RISOLVO	
$\frac{1}{2} (500 \times 120) = \frac{1}{2} 60000 \text{ (andata)}$	$\begin{array}{r} 500 \times \\ 120 = \\ \hline 000 \\ 1000 = \\ 500 = \\ \hline 60000 \end{array}$
$\frac{1}{2} (60000 \times 2) = \frac{1}{2} 120000 \text{ (ritorno)}$	$\begin{array}{r} 60000 \times \\ 2 = \\ \hline 120000 \end{array}$
<ol style="list-style-type: none"> 1 Scalo all'alloggio prescelto 2 Trasporto dei bagagli all'alloggio 3 Visita della città. 	
<p>Decidere i giorni in cui si fa la gita</p>	
<p>* Quelle scritte in rosso sono le domande</p>	

Seconda

PROBLEMA

LA CLASSE QUARTA DI SALZANO VUOLE FARE UNA GITA A VERONA.

SALZANO DISTA DA VERONA 120 CHILOMETRI.

IL PULLMAN COSTA 500 LIRE AL CHILOMETRO.

QUANTO SPENDE LA CLASSE PER IL PULLMAN, AIUTALI A PROGRAMMARE LA GITA.

RISOLVO

$$\text{Km } (120 + 120) = \text{Km}$$

(Km di andata e ritorno)

$$\begin{array}{r} 120 + \\ 120 = \\ \hline 240 \end{array}$$

$$\text{€ } (240 \times 500) = \text{€ } 120.000$$

(costo che un bambino deve pagare)

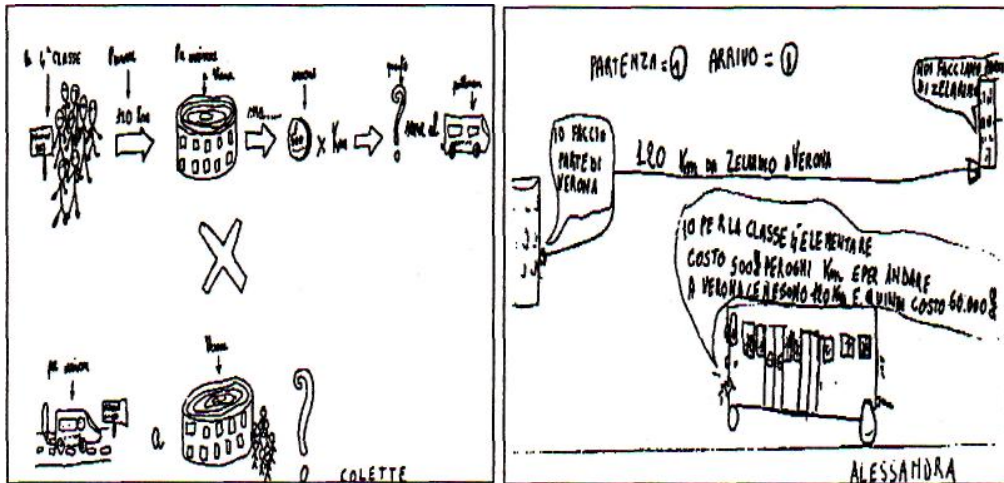
$$\begin{array}{r} 500 \times \\ 240 = \\ \hline 000 \\ 20000 \\ 10000 - - \\ \hline 120000 \end{array}$$

RIPOSTA

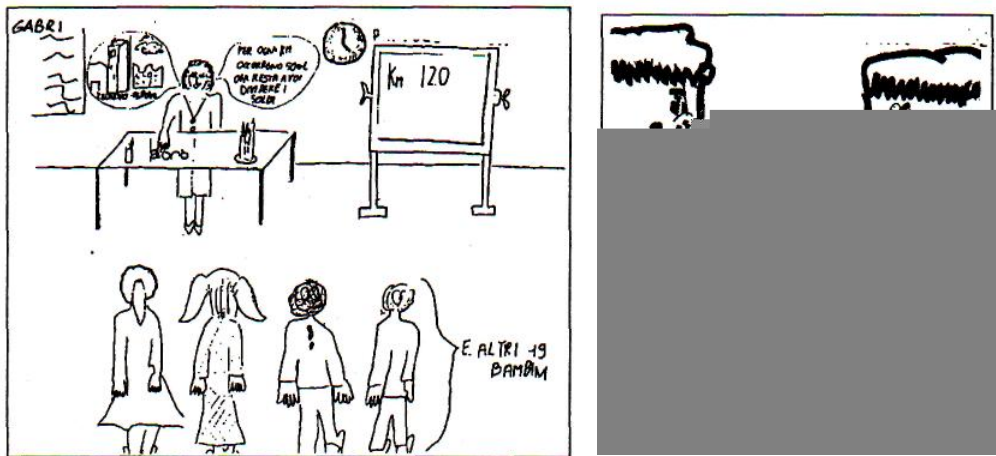
Un bambino spende € 120.000

Io ho scritto le cifre 120+120 perché penso che si paghi l'andata e il ritorno.

Protocolli: dopo il lavoro di programmazione alcuni alunni utilizzano il disegno come rappresentazione di figure risolutive (D'Amore, 1995).



Nella risoluzione grafica alcuni alunni hanno visualizzato la situazione problematica in modo statico utilizzando figure puramente allegoriche.



Le interviste

Il contenuto delle interviste conferma le osservazioni raccolte nella fase di svolgimento della prova e ripropone la presenza di atteggiamenti o convinzioni che riguardano sia la natura della matematica in generale che le proprie capacità.

In modo particolare, nella risoluzione dei problemi, emergono connotazioni più specifiche risultanti da interpretazioni, abitudini, esperienze, taciti accordi

di prassi scolastica per i quali, se nel testo manca un dato, l'insegnante invita a "stare attenti", avvisa che "forse c'è un trabocchetto", o che "bisogna pensare di più".

Questi schemi interpretativi portano a considerare il problema come:

- esercizio che si deve eseguire, fare;
- applicazione di uno schema abituale di impostazione della risoluzione;
- raccolta di dati (tutti da utilizzare) con i quali si combina un'operazione per ottenere un risultato.

Tali considerazioni si possono dedurre da alcuni esempi di interviste qui riportate:

Ins.: "...mi mostri come hai lavorato..."

Alessandro: "...risolvo con l'operazione, prendo i dati del problema e so che li uso per fare un'operazione e per scrivere lo schema..."

Andrea: "...ho scritto i dati cioè ho preso i numeri e la frase che componevano e ho messo la risposta della spesa..."

Ins.: "...perché non hai pensato al ritorno..."

Silvia: "...ma se tu volevi anche il ritorno, dovevi scriverlo..."

Laura: "...se devo fare il problema con il dato nascosto, la maestra ci avverte dicendo che c'è un trabocchetto e allora penso e vado alla ricerca del trabocchetto..."

Gabri: "...Il ritorno non mi è passato per la testa, non c'è nel testo una frase che ti dica andata e ritorno, era meglio metterla..."

La raccolta delle interviste fatte agli alunni che avevano la consegna di programmare la gita, evidenzia in questi l'assunzione di un atteggiamento meno ansioso e più partecipe nei confronti della prova.

Abbiamo constatato che, dando ai bambini la possibilità di lavorare al di fuori degli schemi abituali di soluzione di problemi (chiedendo loro, ad esempio, di disegnare, stendere il programma della gita, discutere), essi vengono altamente motivati e si sentono liberi di esprimersi con creatività e originalità: possono pensare e possono esprimersi.

Sembra, come emerge da questi ultimi esempi di interviste, che forse il "problema" (inteso come esercizio) limita il pensiero, invece il "programma", il "disegno", la "discussione" danno possibilità di pensare.

Colette: "...nel programma ho messo il tutto, nel disegno io ho seguito i dati del testo; quelli descrittivi e quelli numerici..."

Gabri: "...il lavoro di ieri è stato bello perché potevamo fare come volevamo noi, dire le nostre opinioni, alcuni punti erano liberi e così è più simpatico..."

Silvia: "...nel programma avevo parlato del ritorno, ma erano due cose come separate, per la spesa ho guardato i numeri del problema..."

Alessandra: "...è bello il lavoro di ieri perché sia nel programma che nel disegno puoi fare come vuoi, non c'è qualcuno che ti dà mentre scrivi delle informazioni... fare la lista è una tua idea..."

Conclusione

Nella prima ipotesi avevamo affermato che le difficoltà che incontrano i bambini nell'utilizzare il dato del ritorno nel calcolo della spesa potevano forse dipendere dalla difficoltà di rappresentarsi la situazione, sia a livello mentale che grafico. In altre parole i bambini potrebbero trovare difficile il passaggio dalla lettura e comprensione di un testo scritto in modo conciso, alla rappresentazione mentale e/o grafica della situazione.

Non è necessario dilungarsi troppo sull'importanza data da molti autori sulla rappresentazione della situazione problematica. A noi piace ricordare Vergnaud, particolarmente quando afferma che «la funzione principale della rappresentazione... è concettualizzare il reale per agire efficacemente...» (Vergnaud, 1992, p. 126), considerando anche il contenuto delle conoscenze che alimentano il processo di rappresentazione stesso.

«La rappresentazione interessa la formazione dell'esperienza nel suo insieme, sia che questa esperienza sia sociale o privata, sistematicamente organizzata o aperta, discorsiva o non discorsiva» (Vergnaud, 1992, p. 127).

Ancora Vergnaud ci ricorda che «...i bambini fanno uso di significanti specifici (diagrammi di Euler-Venn, schemi, tavole, uguaglianze ed equazioni, grafici) e beninteso, del significante generale che è il linguaggio naturale, e i bambini sono condotti ad accompagnare il processo di risoluzione nel quale sono impegnati attraverso molteplici attività linguistiche che riguardano l'estrazione delle informazioni pertinenti, il ragionamento e la scelta, il conteggio, l'argomentazione con gli altri allievi e il maestro» (Vergnaud, 1992, p. 130). Come insegnanti pare logico pensare che, se il bambino si immagina mentalmente la situazione problematica, oppure ci ragiona verbalizzando o scrivendo i dati e le relazioni, oppure ancora si aiuta con schemi, grafici, tabelle o semplicemente con disegni, allora non dovrebbe cadere in errori come per esempio quello di non considerare dati impliciti necessari.

Ma è proprio vero che il disegno o qualsivoglia schema o rappresentazione grafica può essere per il bambino uno strumento facilitatore e organizzatore per la risoluzione di problemi?

D'Amore ci ricorda in una sua ricerca che spesso gli «...insegnanti insistono su apparati formali che, chissà perché, dovrebbero meglio di quelli tradizionali sviluppare abilità nella risoluzione dei problemi, per esempio malsani diagrammi a blocchi, o di flusso, o maldigerite frecce. Se questi strumenti riescono a diventare naturali ed acquisiti, usati cioè in modo spontaneo, insieme agli altri, ben vengano, ma, ahimé, ho la prova che non sempre è così, anzi: molto spesso questi apparati finiscono con l'essere dannosi» (D'Amore, 1995, p. 91).

Anche noi abbiamo avuto modo di osservare che pochissimi bambini utilizzavano rappresentazioni grafiche spontaneamente come aiuto per

immaginarsi la situazione. Anche se noi abbiamo sempre chiaramente detto ai bambini, prima che iniziassero il compito, che avrebbero potuto risolvere il problema come meglio desideravano adoperando disegni, schemi, parole, operazioni ecc., la netta maggioranza, sia di quelli che operavano con la risoluzione aritmetica, che di quelli che operavano con la programmazione della gita, hanno fatto il disegno dopo aver calcolato o scritto il programma. Molto probabilmente lo hanno fatto o perché era stato da noi chiesto, e quindi per farci "contenti", o perché erano abituati al rito di esecuzione per il quale: prima si fa il compito, poi si fa il disegno, quasi come riempitivo del tempo rimasto, o come sfogo della tensione accumulata durante il lavoro, od infine per altri motivi legati alle esigenze dell'insegnante. Scattano quindi inesorabilmente le clausole del contratto didattico anche quando c'è un altro insegnante, anche quando cambiano radicalmente le proposte di lavoro: il bambino ha un modello preciso di esecuzione degli esercizi (anche se sono spacciati per problemi), per il quale i vari passaggi sono compiuti con radicati automatismi. Se si tenta di spezzarli ecco che il bambino o si sente disorientato, o si ribella ed accusa il mancato rispetto delle regole del contratto didattico. Capita spesso che il bambino, pur sapendo di essere nel giusto rispetto alla consegna, ha comunque il dubbio se il suo procedimento sia veramente matematica, e quindi combina mediante qualche operazione i dati numerici a disposizione o dà delle definizioni che tendono a rassicurarlo sul piano dello svolgimento del compito (in questo senso D'Amore e Sandri hanno parlato di E.G.F., ovvero "esigenza della giustificazione formale", D'Amore, Sandri, in corso di stampa).

A questo punto resta l'uso del linguaggio naturale come possibile aiuto per monitorare i formalismi matematici e non cadere in tranelli di percorso. Il ragionamento proposizionale dovrebbe scattare dopo la lettura e comprensione del testo del problema. Ma Laborde ci ricorda che «...le situazioni abituali di lettura nelle ore di matematica sono quelle di lettura di enunciati di problemi ai fini della risoluzione. Ora, abitudini abbastanza forti pesano su queste situazioni: l'enunciato contiene solo le informazioni necessarie e sufficienti, gli elementi che vi sono codificati devono essere utilizzati per la soluzione. Gli allievi non imparano così ad estrarre da un testo informazioni pertinenti per l'uso che essi vogliono farne» (Laborde, 1995, pp. 75-76). In questo senso gli alunni sembrano aver fedelmente rispettato le clausole del contratto didattico che diventano tre convinzioni specifiche:

1. bisogna utilizzare tutti i dati presenti nel testo;
2. se manca un dato l'insegnante in qualche maniera deve avvertire;
3. il testo è quello dato, non è possibile modificarlo di propria iniziativa.

Ecco quindi che gli alunni sono spinti più ad eseguire che a ragionare, più a fare i calcoli delle operazioni che ad immaginare la situazione. Anche Tonelli e Zan hanno rilevato che «la prassi scolastica attuale infatti non prevede un'attività di reale problem solving, ma piuttosto di esercizi di routine, in cui

l'attenzione è focalizzata sui prodotti piuttosto che sui processi, e questo non favorisce di certo la nascita e lo sviluppo di capacità manageriali» (Tonelli, Zan, 1995, p. 31). Anche noi abbiamo rilevato che se i bambini non sono spinti a elaborare processi metacognitivi di autoregolazione, non controllano ciò che stanno facendo in base alle risorse disponibili e quindi non utilizzano ciò che sanno in modo ottimale. Inoltre dimostrano difficoltà ad elaborare efficaci processi metacognitivi relativi a ciò che fanno o, come piace affermare a Vergnaud, ciò che non fanno. In questo senso non si pongono problemi ad eseguire una moltiplicazione a tre cifre anche se sanno di non saperla fare, o prendono qualsiasi numero che risulta scritto nel testo (come in "classe 4B") e lo compongono in una qualsiasi operazione, che necessariamente va fatta e deve avere un risultato. Infine si riporta qualsiasi risultato sia stato ottenuto nell'ultimo passaggio del rito di esecuzione: la celeberrima "risposta", possibilmente evidenziata con il colore rosso. I numeri sono stati di frequente adoperati dai bambini come numeri puri, astratti, senza cercare di capire a quale referente fossero relativi. Anche in quest'ultimo caso abbiamo rilevato che spesso i bambini non si preoccupano di attivare (o forse non sono abituati a farlo) dei meccanismi di controllo o autoregolazione su ciò che stavano facendo con i numeri o sulla coerenza dei numeri che avevano di volta in volta ottenuto.

Per quanto riguarda l'ipotesi della componente affettivo-emozionale che potrebbe indurre il bambino a non considerare il ritorno perché poco significativo, crediamo che questo atteggiamento, realmente riscontrato in alcuni bambini, venga spesso incentivato dal comportamento degli insegnanti stessi, che nella maggior parte dei casi non recuperano e non valorizzano il momento del ritorno e concentrano le esperienze più significative delle gite scolastiche nel viaggio di andata, fino alla destinazione finale. È interessante inoltre notare che molti bambini che hanno risolto il problema con la programmazione della gita non hanno avuto difficoltà a pensare e riportare delle informazioni sul ritorno, come l'orario di arrivo, ma la maggioranza di essi, nel momento in cui dovevano comporre l'operazione e fare i calcoli della spesa, non ha considerato la distanza chilometrica del ritorno: anche loro, quando devono lavorare con i numeri, sono abituati a concentrare l'attenzione più sull'algoritmo che sui possibili significati e referenti da cui i numeri stessi e le operazioni dipendono.

Abbiamo riscontrato infine che i fattori affettivi ed emozionali più influenti sulla buona risoluzione del problema sono quelli che emergono nel momento della risoluzione stessa del compito. Questi fattori sono per noi legati agli atteggiamenti che i bambini, e non solo loro, ma anche gli insegnanti, mettono in gioco a scuola:

- la motivazione;
- l'interesse;
- la fiducia in sé stessi;

- il fatalismo.

Inoltre come hanno sottolineato Tonelli e Zan (Tonelli, Zan, 1995) oltre ai fattori affettivi giocano un ruolo determinante anche le convinzioni che l'allievo si costruisce sul suo rapporto con la matematica così come gli è stata insegnata, convinzioni che sono in grado di inibire le capacità e le conoscenze del soggetto stesso. Si tratta dei preconcetti e dei misconcetti studiati da Schoenfeld (Schoenfeld, 1987).

Riteniamo sia inoltre da rilevare che quasi tutti i bambini, che hanno eseguito il compito della programmazione della gita, hanno chiaramente espresso un maggior interesse ed entusiasmo nello svolgimento del loro lavoro e, soprattutto, in modo nettamente superiore rispetto ai bambini che stavano lavorando con la sola risoluzione aritmetica. La conseguente riflessione che se ne trae è che i bambini, se sono invitati a svolgere un compito di lingua, si sentono entro certi limiti liberi di potersi esprimere con creatività ed originalità; se invece si propone loro la risoluzione di un problema, allora la creatività e l'originalità vengono inibite con l'esecuzione rituale di sterili formalismi e procedure aritmetiche. Anche in questo caso risulta essere presente una forte implicazione del contratto didattico.

A questo punto l'unica ipotesi possibile, e della quale già è emersa sino ad ora l'estrema importanza, è quella relativa al contratto didattico. Riteniamo che sia proprio questo uno dei principali meccanismi di modulazione responsabile del successo o del fallimento delle prestazioni dei bambini nella risoluzione di problemi come quello da noi proposto.

Il risultato di questa ricerca fa emergere un modo sterile e sclerotizzato di insegnare la matematica, intesa come un mero insieme di formule, tecniche di calcolo, esercizi e definizioni fini a sé stesse. Con questo non vogliamo tanto affermare che le formule, le tecniche di calcolo, gli esercizi e le definizioni siano inutili e dannose, ma piuttosto che queste devono essere sempre utilizzate come strumenti per fissare, elaborare, progettare, ricercare, interpretare la realtà nei suoi molteplici aspetti. Altrimenti la maggioranza dei bambini vive l'apprendimento della matematica con scarso interesse, poca motivazione e fiducia nelle proprie capacità, assenza di creatività ed originalità di pensiero, triste fatalismo nel concepire la buona riuscita di un compito di matematica come strettamente dipendente da una buona dose di fortuna. In questo senso siamo convinti sostenitori di quanto definito nell'introduzione al programma di matematica per la scuola elementare: «l'educazione matematica contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti: di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e deduzione, di controllo e quindi di verifica o smentita. Essa tende a sviluppare in modo specifico, concetti, metodi e atteggiamenti utili a produrre le capacità di ordinare, quantificare, e misurare fatti e fenomeni della realtà e a formare le abilità necessarie per interpretarla criticamente e intervenire consapevolmente su di essa» (Programmi didattici per la scuola primaria, D.P.R. 12 febbraio 1985 n.104).

Rispondendo all'ultima domanda dell'ipotesi crediamo che l'ostacolo non stia tanto in certi nodi matematici o in problemi con tranelli di dati impliciti, ma nel modo di pensare, proporre ed applicare la matematica, sia nella realtà che come gioco.

Riferimenti bibliografici

- Brousseau G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 33-115.
- D'Amore B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Milano: Angeli.
- D'Amore B. (1995). Lingue e linguaggi nella pratica didattica, uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica nella scuola elementare. In: Iannamorelli B. (ed.). *Lingue e linguaggi nella pratica matematica*. Sulmona: Qualevita. 79-128. (Ristampato su *La Matematica e la sua didattica*. 3, 1995, 328-370).
- D'Amore B., Sandri P. (in corso di stampa). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante.
- Laborde C. (1995). Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica? In: Iannamorelli B. (ed.). *Lingue e linguaggi nella pratica matematica*. Sulmona: Qualevita. 63-76. (Ristampato su *La Matematica e la sua didattica*. 2, 1995, 121-135).
- Rondini A. (1993). Percorsi. In: Boero P. *Bambini, maestri, realtà: verso un progetto per la scuola elementare*. II, 55-72.
- Schoenfeld A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In: Schoenfeld A. H. (ed.). *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Tonelli M., Zan R. (1995). Il ruolo dei comportamenti metacognitivi nella risoluzione di problemi. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 18A, n. 1, 8-33.
- Vergnaud G. (1992). Concetti e schemi in una teoria operatoria della rappresentazione. In: D'Amore B. (ed.). *Fischbein E., Vergnaud G. Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. Bologna: Pitagora. 125-143.